TEMA n. 3.

Esercizio 1. Una grossa università divide gli studenti all'ingresso in due fasce. Nella fascia A, di eccellenza, ci sono gli studenti che sono esentati dalle tasse, mentre nella fascia B ci sono gli studenti rimanenti, che pagano la rata con cadenza trimestrale, per tutti di uguale importo di 1000 Euro. Ogni tre mesi una percentuale di studenti di fascia B pari a q (con $0 < q < \frac{1}{2}$) viene promossa in fascia A, mentre una percentuale di studenti di fascia A pari a p (con $0 < p < \frac{1}{2}$) viene retrocessa in fascia B.

Il Rettore osserva che il gruppo di studenti entrati l'anno scorso ha versato ogni tre mesi importi complessivi sempre più bassi. Il Dipartimento di Matematica gli comunica che l'importo complessivo versato da quegli studenti non si avvicina a zero ma rimarrà sempre maggiore o uguale di una soglia a cui tende.

(i) Se a, b sono il numero di studenti in ingresso l'anno scorso per ogni fascia, come calcolare la soglia?

(ii) Provare che la successione data dal numero di studenti di fascia A, contati ogni tre mesi, è monotona.

(iii) Oggi il numero di studenti di ciascuna fascia è dato rispettivamente da a_0 e b_0. Il Rettore deve aumentare le entrate ma non vuole aumentare l'importo della rata, e decide quindi di variare i parametri p e q. Qual'è la condizione che devono soddisfare p e q perché l'introito cominci a risalire?

Esercizio 2. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata $n \times n$ di rango uno, a coefficienti reali.

(i) Provare che esistono $(v_1, \dots v_n)$ e $(w_1, \dots w_n)$ tali che $a_{ij} = v_i w_j$.

(ii) Calcolare il polinomio caratteristico di A in funzione di $tr(A)$.

(iii) Calcolare il generatore dell'ideale $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(A) = 0\}$ (polinomio minimo di A) in funzione di $tr(A)$.

Esercizio 3. (i) Sia Σ un insieme di enunciati contenenti

a) $\forall x \forall y (x \leq y \lor y \leq x)$ e

b) $\forall x \forall y \forall z (x \leq y \land y \leq z \to x \leq z)$

Dimostrare che se Σ ha un modello infinito allora ha un modello che contiene una catena discendente infinita.

(ii) Dimostrare in un sistema formale con uguaglianza che se R è una relazione simmetrica, transitiva e tale che per ogni x esiste y tale che xRy allora R è riflessiva.

(iii) Dimostrare che il seguente enunciato è equivalente all'assioma della scelta:.

Se f è una applicazione suriettiva da X su Y, allora esiste una applicazione $g : Y \to X$ tale che $f \circ g$ è l'identità su Y.

Esercizio 4. Trovare il campo di spezzamento $\mathbb{F}$ su $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^3 - 7 \in \mathbb{Q}[x]$. Si determinino tutti i sottocampi di $\mathbb{F}$ ed il gruppo di Galois dell'estensione $\mathbb{F} \mid \mathbb{Q}$. È vero che $\mathbb{F}$ è un'estensione semplice di $\mathbb{Q}$?

Esercizio 5. È noto che ad ogni codice ciclico binario di lunghezza n corrisponde un ideale nell'anello $R = \mathbb{F}_2[x]/(x^n - 1)$.

1. Dimostrare che gli ideali di R sono principali.
2. Si diano delle proprietà dei polinomi generatori del codice.
3. Si classifichino i codici ciclici binari di lunghezza 7, sapendo che $x^7 - 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^3 + x + 1)(x + 1)$ in $\mathbb{F}_2[x]$.

Esercizio 6. (a) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (1 + |x|^2)^{-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}^n$, è in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

(b) Dimostrare che $f(x) = P_k(x)e^{-|x|^2}$ è in $L^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni polinomio P_k di n–variabili reali e di grado $k \geq 0$.

(c) Dire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f(x) = |x|^{-1}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, è in $L^1(B_R)$, ove B_R è la palla di $\mathbb{R}^n$ centrata in 0 e di raggio $R > 0$.

(d) Sia $n \mapsto f_n = \dfrac{1}{n}\chi_{[0,n^a]}$, con $1 \leq p < a < q$. Dimostrare che $f_n \to 0$ per $n \to \infty$ in $L^q(\mathbb{R})$, ma non in norma $L^p(\mathbb{R})$.

Esercizio 7. (a) Sia C un sottoinsieme chiuso e non vuoto di $\mathbb{R}^n$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ sia

$$d(x) = \min\{|x - y| \ : \ y \in C\}.$$

Dimostrare che d è convessa in $\mathbb{R}^n$ se e solo se C è convesso.

(b) Sia p un polinomio quadratico e omogeneo in $\mathbb{R}^n$, definito da

$$p(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathbb{A} = [a_{ij}],$$

dove $\mathbb{A}$ è una matrice $n \times n$ simmetrica. Dimostrare che p è convessa in $\mathbb{R}^n$ se e solo se $p \geq 0$ in $\mathbb{R}^n$.

(c) Sia $f(x) = \varphi(g(x))$, ove $g : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega = \Omega^0 \neq \emptyset$ insieme convesso di $\mathbb{R}^n$, è una funzione convessa di classe $C^2(\Omega)$, e $\varphi : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo di $\mathbb{R}$, è una funzione di classe $C^2(I)$ tale che $g(\Omega) \subset I$, $\varphi' \geq 0$ e $\varphi'' \geq 0$ in I. Dimostrare che f è convessa in Ω utilizzando il punto (b).

Esercizio 8. Si consideri una successione infinita di prove indipendenti ognuna con probabilità di successo $p \in [0, 1]$. Si dimostri che se $a(k) = 3k$, allora:

(1) con probabilità 1 solo per un numero finito di k accade che, a partire dalla prova k, ci siano $a(k)$ successi consecutivi.

(2) Si provi poi che, se $b(k) = 4$, allora con probabilità 1 accade che per infiniti k, a partire dalla prova k, ci sono $b(k)$ successi consecutivi.

(3) Provare infine a migliorare i risultati precedenti, trovando delle funzioni non banali $a(k) < 3k$ e $b(k)$, con $\lim_{k\to\infty} b(k) = \infty$, per cui valgono ancora (1) e (2), rispettivamente.

Esercizio 9. Si partecipa ad un gioco nel quale in ogni partita si vince se si indovina in quale di una serie di lanci di un dado esce per la prima volta il 3. Utilizzando la strategia ottimale, dopo 100 partite se ne sono vinte 8. Dire se ci sono elementi per asserire che il lancio del dado non è stato fatto correttamente.

Esercizio 10. Un punto materiale di massa m si muove lungo l'asse x sotto l'azione di un campo di forze conservativo con energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2\left(k + \frac{\epsilon}{2}x^2\right),$$

ove k e ϵ sono costanti reali.

1. Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità al variare di k e ϵ.
2. Determinare il tipo di moto al variare dell'energia totale E e disegnare i corrispondenti ritratti di fase.
3. Nei casi periodici determinare il periodo e il limite per valori dell'energia che tendono all'energia dell'equilibrio stabile.

Esercizio 11. Una lamina rettangolare omogenea è libera di ruotare attorno ad un asse verticale r contenente due suoi vertici. A sua volta l'asse r ruota con velocità uniforme attorno a un asse verticale u fisso, posto a distanza da r pari a un terzo del lato della lamina perpendicolare a r.

1. Scrivere le equazioni di moto della lamina.
2. Determinare le posizioni di equilibrio relativo nel sistema di riferimento S solidale con gli assi u e r, e discuterne le stabilità.
3. Calcolare il momento di una forza esterna opportuna che consenta alla lamina di ruotare in modo uniforme nel sistema S, e calcolare il momento delle reazioni vincolari durante tale moto.

Esercizio 12. Dimostrare che il polinomio caratteristico della matrice

$$C = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}, \qquad a_0 = 1.$$

Dimostrare, quindi, che per gli zeri di $p(x)$ vale la seguente maggiorazione (dovuta a Cauchy):

$$p(z) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad |z| \leq 1 + \max_{i=1,\dots,n} \frac{|a_i|}{|a_0|}.$$

Esercizio 13. Sia dato il polinomio

$$p(x) = \prod_{i=1}^{7} (x - i).$$

Se si perturba il suo coefficiente principale facendolo divenire 1.0001, di quanto si perturba, approssimativamente, la radice $z = 6$?

Esercizio 14. Si supponga di avere una azienda che produce due prodotti, A e B. Ciascuno di questi deve essere lavorato in 3 differenti laboratori, con i seguenti requisiti temporali per unità di prodotto:

prodotto	laboratorio 1	laboratorio 2	laboratorio 3
A	2	5	3
B	6	3	3

Sapendo che:

- i 3 laboratori lavorano, rispettivamente, al più 60, 60 e 42 ore per ciclo produttivo,
- i due prodotti garantiscono, rispettivamente, un profitto unitario di 3 e 5,

massimizzare il guadagno complessivo. Ciò premesso:

1. descrivere matematicamente il precedente problema di ottimizzazione,
2. risolvere graficamente.